Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante.

323. D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18. [Questo articolo è stato pubblicato anche in lingua francese: *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1998, 1, 55-94].

Bruno D'Amore - Patrizia Sandri

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Summary. *In this study we examine, from various points of view, the individual, written reponses of 8-9 old and 12-13 years old pupils to addition problems of the standard type given in school and in which one piece of information is missing. In particular, we investigate if and how the pupil makes use of the numerical data contained in the problem. Our analysis is also concerned with the influence of age on the recognition that information is missing, with the language used in the reponse, with the effect on the pupil's reponse of his/her involvement in the situation described in the statement of the problem, and with the kind of extra-mathematical reponse provided by the pupil.*

Lavoro eseguito con il contributo economico del CNR (contratto numero 96.00196.01).

0. Premessa.

Nella scuola primaria italiana, i programmi ufficiali di matematica prevedono che l'allievo sia stimolato a cimentarsi con problemi con dati sovrabbondanti, con dati mancanti, con dati contraddittorî.[1] In particolare sono considerati interessanti i problemi con dati mancanti perché l'allievo è spinto a cercarli, intervenendo sul problema e quindi assumendo in certa misura un ruolo attivo anche in fase di elaborazione del testo del problema stesso e non solo nella fase di risoluzione.
Nella pratica didattica, ci si limita quasi esclusivamente a problemi nei quali i dati possono essere reperiti attraverso misurazioni dirette (per esempio per determinare l'area del pavimento di una stanza); oppure attraverso la visita ad agenzie di viaggio (per esempio per pianificare tempi e costi in vista di una gita); e così via. Possiamo chiamare questi: problemi reali con dati mancanti ma rintracciabili (**p.r.**).

Alla base di sollecitazioni del tipo **p.r.**, è bene che compaiano "attività" che in qualche modo la classe è motivata a compiere (nei due esempi precedenti, rispettivamente: l'acquisto di piastrelle per una sede nuova, la gita scolastica di primavera).
Questo tipo di attività è solitamente condotto nel gruppo-classe, dunque ciascun componente della classe collabora secondo le proprie possibilità (eventualmente con ripartizione dei compiti) ed alla fine il risultato è positivo: si giunge cioè alla risoluzione del problema.

I problemi **p.r.** sembrano essere, almeno per quanto concerne l'analisi delle risposte degli allievi, di un genere del tutto diverso da quello che si chiama abitualmente "problema impossibile". Infatti, l'impossibilità può essere caratterizzata da parecchi fattori, secondo la tipologia adottata da D'Amore e Sandri (1993).
In un suo celebre articolo, Y. Chevallard (1988, p. 1) studia i problemi del genere: «Un pastore ha 360 pecore e 5 cani. Qual è l'età del pastore?» allo scopo di analizzare ciò che è solitamente designato da "comportamento di risposta *assurdo*".
Esiste oggi una vasta bibliografia a proposito di questi problemi. Oltre ai lavori di Chevallard, si possono consultare quelli della Équipe di Grenoble (1980), di S. Baruk (1985), di R. Brissiaud (1988), di A. N. Perret-Clermont, di M. L. Schubauer-Leoni e A. Trognon (1992) e l'approfondita analisi di M. L. Schubauer-Leoni e N. Ntamakiliro (1994), per non citarne che alcuni.

Questi problemi si caratterizzano per un'assenza di legame "logico" (non certo da un punto di vista formale, ma di esperienza) tra la prima parte dell'enunciato e la domanda esplicita finale; una tale lacuna suggerisce (*dovrebbe suggerire*) a chi cerca la soluzione che egli si trova in una situazione assurda. Ma, come si sa bene, una delle clausole del contratto didattico (Chevallard, 1988, p. 10 e seguenti) e l'adesione ad un modello generale di problema (Brousseau, 1986) (Zan, 1991-92) lo spingono a *tentare* lo stesso di dare una risposta; questi effetti del contratto didattico sono stati analizzati in dettaglio nei lavori citati in precedenza.

[1] "- individuare la carenza di dati essenziali per la risoluzione di problemi ed eventualmente integrarli; riconoscere in un problema la presenza di dati sovrabbondanti, oppure contraddittori ed eventualmente integrarli; riconoscere in un problema la presenza di dati sovrabbondanti, oppure contraddittori con conseguente impossibilità di risolverlo". Tratto da: *Programmi didattici per la scuola primaria*, Ministero della Pubblica Istruzione, D.P.R. 12 febbraio 1985.

Tra i problemi la cui soluzione è impossibile da trovare con i dati forniti, c'è tuttavia una categoria diversa dalle due precedenti.
Si tratta di problemi caratterizzati come segue:

- il loro enunciato è di forma scolastica standard
- non c'è una "rottura logica" tra dati e domande, che caratterizza, per esempio, i problemi citati da Chevallard (1988, p. 1) e un esempio dei quali è stato ricordato precedentemente
- per arrivare alla soluzione, manca un dato che non è disponibile né empiricamente rintracciabile, contrariamente al caso dei problemi **p.r.**

Per esempio:

> «Giovanna va a fare la spesa e spende 10.000 lire. Quanto le resta nel portafoglio?».

Problemi di questo tipo sono stati studiati da Krutetskij (1976), Menchiskaya-Kalmikova-Gal'perin (cit. da Krutetskij), Puchalska e Semadeni (1988). Lo scopo comune di questi lavori era di stabilire le caratteristiche della percezione mentale dei problemi matematici presso gli allievi[2] e di effettuare delle classificazioni per delle ragioni puramente didattiche. Tutti questi Autori hanno studiato i comportamenti degli allievi di fronte alla risoluzione di problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante (che noi chiameremo d'ora in poi **t.s.**), presentati *oralmente*.
Al fine di limitarci allo studio esclusivo dei problemi di tipo **t.s.**, noi ci troviamo di fronte a delle variabili di situazione che illustreremo nel paragrafo seguente, la cui scelta caratterizza la nostra ricerca.

1. Scopi della ricerca.

1. La ricerca che qui proponiamo ha preso l'avvio dal seguente quesito: qual è la risposta dell'allievo di fronte alla proposta di rispondere da solo (senza il contributo dei compagni in un gruppo o dell'insegnante) e per iscritto, ad un problema **t.s.** nel quale manca un dato? Come si comporterà l'allievo in questo caso (**t.s.**) nel quale egli non è direttamente implicato ed in cui l'esigenza di completare, con una ricerca attiva, le lacune dovute ai dati mancanti non appaiono così evidenti e spontanee come nei problemi di tipo **p.r.**?

1. Offrirà comunque una soluzione o denuncerà la mancanza di dati? Inventerà situazioni fittizie che in qualche modo pongano rimedio alle lacune?

2. Il comportamento è influenzato dal livello scolastico? Ci sono variazioni di comportamento dovute al livello scolastico?

3. Ricorrerà a qualche tipo di rappresentazione o si limiterà a far uso di formalismi noti?

4. Che tipo di linguaggio userà? Visto il testo del problema, farà solo uso di lingua naturale o cercherà comunque una formalizzazione?

---

[2] «This series was intended to reveal some characteristics of the pupil's mental perception of a mathematical problem» (Krutetskij, 1976, p. 105).

5. Infine: se il testo del **t.s.** richiama alla mente situazioni vissute o potenzialmente tali, ciò accrescerà o diminuirà la capacità critica? Che ruolo ha in questa prova la possibile identificazione con i personaggi del problema e l'eventuale coinvolgimento affettivo?

Abbiamo scelto testi di estrema semplicità e più precisamente problemi di tipo additivo (Vergnaud, 1981). La scelta dell'estrema semplicità è motivata dal fatto che, se avessimo dato testi complessi, non avremmo poi saputo valutare una eventuale mancanza di risposta: essa avrebbe potuto essere interpretata o come dovuta alla raggiunta consapevolezza della mancanza del dato oppure come una reazione di abbandono di fronte alla complessità.
La prova è stata condotta sia nella scuola elementare [in III (bambini di età 8-9 anni)] sia nella scuola media [in II, che d'ora in poi chiameremo talvolta VII (ragazzi di età 12-13 anni)], per avere, in più, la variabile *'età degli allievi'*.
Poiché in alcune classi, specialmente della scuola elementare, comincia a diffondersi la pratica di proporre problemi con dati mancanti, abbiamo rigorosamente scelto classi con insegnanti di stampo tradizionale che **non** avevano mai proposto ai proprî allievi problemi di questo tipo.
Abbiamo fatto ricorso ad un test costituito da 4 testi; ciascuno di questi testi era scritto su un foglio A4, da solo, con ampio spazio lasciato in bianco per l'intervento dell'allievo.
Poiché riteniamo che, in generale, la risoluzione di un problema passi attraverso l'immagine mentale che il risolutore si fa della situazione in esso descritta [ma con le limitazioni suggerite in D'Amore (1997)], abbiamo ideato due coppie di problemi del tutto simili, ma costruiti in modo tale che il secondo di ciascuna coppia fosse più coinvolgente sul piano affettivo, in modo da far sì che l'immagine mentale da esso sollecitata portasse l'allievo ad immedesimarsi di più nella situazione.

Vediamo i 4 testi:

P.1 : Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?

P.2 : La zia Giovanna va a trovare i suoi nipotini Aldo e Bruna. Dopo averli salutati e abbracciati, mette 3000 lire nel salvadanaio di Aldo e 5000 lire in quello di Bruna. Secondo te ci sono più soldi nel salvadanaio di Aldo o in quello di Bruna?

P.3 : Antonio studia fino alle 17 e Giovanni studia fino alle 18. Chi ha studiato per più tempo?

P.4 : Carlo fa i suoi compiti nel pomeriggio per un'ora e mezza; Carla per 45 minuti. I cartoni animati in TV iniziano alle 17. Chi dei due potrà vederli?

Distinguiamo le due coppie di testi:

a. la prima coppia (P.1, P.2) presenta la mancanza di un dato di partenza; ma P.2 è più coinvolgente, da un punto di vista affettivo, di P.1, dato che narra una situazione che è quasi la sceneggiatura di un avvenimento che ha almeno in qualche occasione coinvolto personalmente più o meno tutti i bambini;

b. la seconda coppia (P.3, P.4) ha come caratteristica il fatto che si tratta di prendere in esame durate temporali ed in entrambi i problemi non sono dati gli orarî di inizio dello studio pomeridiano; ma P.4 riguarda i cartoni animati in TV, argomento assai avvertito dai giovani allievi, per molti dei quali costituisce la causa di malumori nei riguardi dei proprî genitori.

Vi sono poi molte altre differenze tra i problemi proposti:

- i dati forniti in P.4 sono molto più complessi da gestire che non quelli di P.2, dato che riguardano la durata temporale;
- inoltre P.1 e P.2 appartengono alla stessa categoria [prendendo la ben nota classificazione di Vergnaud (1981)]: "Stato (mancante) → trasformazione (nota) → stato (domandato)"; P.3 appartiene alla categoria: "Stato (mancante) → trasformazione (domandata) → stato (noto)", P.4 alla categoria : "Stato (mancante) → trasformazione (nota) → stato (domandato indirettamente)".

La situazione definita dalle condizioni dell'esperienza è diversa dalla relazione abituale allievi-insegnante, poiché i ricercatori si trovano da soli di fronte a degli allievi che sono stati avvertiti che i loro risultati non saranno comunicati ai loro insegnanti di classe (e così, non saranno presi in considerazione nei voti). Non si può dunque parlare, a rigore, di situazione standard di classe e di conseguenza non più di contratto didattico ma piuttosto di *contratto sperimentale* (Schubauer-Leoni et Ntamakiliro, 1994, p. 89 e seguenti).
Noi facciamo tuttavia l'ipotesi che, benché la situazione si distingua nettamente da quella scolare usuale, una grande parte delle risposte degli allievi possa essere legata a delle clausole particolari del contratto didattico (e dunque spiegate tramite questo). Questa supposizione, rinforzata ed illustrata esplicitamente dai nostri successivi commenti ai protocolli degli allievi, è fondata sulle considerazioni seguenti:

- l'attività si sviluppa nel quadro del dispositivo scolare
- nel corso di orari normalmente dedicati alla matematica
- l'insegnante di matematica, uscendo, in qualche modo avverte che egli non cede che momentaneamente il suo posto ai due ricercatori e che rientrerà in aula al termine della prova
- i due ricercatori sono degli adulti, ma poiché non sono assimilabili a personale ausiliario (segretari, bidelli, ...) sono piuttosto considerati come insegnanti che come veri e propri esterni al mondo della scuola.

2. Ipotesi.

Le ipotesi da noi fatte sono le seguenti:

1. In generale, indipendentemente dall'età, sembrava lecito supporre che la situazione nella quale l'allievo si sarebbe trovato ad operare gli avrebbe suggerito un obbligo comportamentale implicito nel modello generale di problema: usare i dati numerici legandoli tra loro con operazioni, dando comunque una risposta formale alla domanda.[3]

2. Si ipotizzava pure che ragazzi più grandi, già avviati al simbolismo algebrico ed all'uso puramente sintattico di esso, avrebbero dovuto in percentuale *nettamente superiore*

[3] Su considerazioni di questo tipo, sono molto utili le letture di (Boero, 1986) e (Zan, 1992).

denunciare l'impossibilità di risolvere il problema proposto, stante la mancanza di un dato essenziale.

3. Inoltre, si ipotizzava che fosse ancora presente in III elementare la necessità spontanea di rappresentare la scena descritta nel testo tramite un disegno, mentre tale necessità tendesse nettamente a ridursi in II media, soppiantata dalla esibizione di un apparato formale.

4. Volevamo analizzare le modalità di esecuzione del compito, soprattutto per avere indicazioni sul linguaggio del quale gli allievi avrebbero fatto uso (ciò spiega la dettagliata analisi di molti protocolli fatta in **4.**) vista l'estrema semplicità del testo e l'impossibilità di trovare una risposta attraverso le usuali modalità aritmetiche, ipotizzavamo una massiccia presenza di risposte senza operazioni, in lingua naturale, soprattutto in III elementare. Facevamo l'ipotesi, invece, che in II media gli studenti avrebbero avvertito la necessità di dover giustificare le proprie risposte tramite qualche procedimento formale.

Sulla base di quanto rilevato in Bouchard (1987), ipotizzavamo anche che l'allievo, nel tentativo di soddisfare ciò che pensava essere l'aspettativa dell'insegnante (o, comunque, dell'adulto; nel nostro caso, dei ricercatori), si sarebbe potuto trovare in una situazione di incertezza a causa della novità del compito, e avrebbe potuto dare risposte diverse, eventualmente anche lontane dall'àmbito matematico, a seconda di come interpretava ed affrontava la richiesta da noi formulata.

5. Facevamo infine l'ipotesi che una maggior immedesimazione nel personaggio o immersione nella storia avrebbe influito in qualche modo "negativamente" sul riconoscimento della impossibilità di risoluzione a causa del dato mancante; e ciò perché, creatosi un'immagine mentale forte, rinforzata da situazioni vicine o potenzialmente tali al suo vissuto, l'allievo avrebbe forse "inventato" il dato mancante, più o meno esplicitamente, legandolo probabilmente alle proprie esperienze o al suo mondo di valori.

3. Metodologia.

La ricerca è stata compiuta, come precedentemente affermato, in classi di III e di VII a Bagnacavallo (Ra), Bologna città, Imola (Bo), Lugo (Ra), Pinerolo (To) e S. Lazzaro di Savena (Bo). Successivamente, la stessa prova è stata condotta, come riporteremo in **4.3.**, a Thessaloniki (Grecia) dal prof. Athanassios Gagatsis (che ringraziamo per l'impegno e la collaborazione), con allievi di III, IV e V elementare.
Di norma (tranne qualche caso particolare) in aula erano presenti solo allievi e ricercatori e non gli insegnanti curricolari della classe. Ad ogni allievo veniva dato solo uno dei 4 fogli, con l'invito a rispondere per iscritto, da solo; ogni cura era posta dai ricercatori per far sì che non vi fossero suggerimenti o copiature. Nei (pochissimi) casi nei quali un intervento a voce alta ha reso dubbio l'esito della prova, abbiamo eliminato tutte le risposte di quella intera classe. Per esempio ciò che è accaduto quando un allievo, appena ricevuto il testo, ha sùbito esclamato: «*Ah, ma come faccio a saperlo*?», mettendo probabilmente molti sull'avviso; dunque, in tal caso la prova è stata effettuata lo stesso, ma noi non abbiamo tenuto alcun conto dei protocolli di quella classe nell'analisi finale.

Agli allievi veniva detto di scrivere tutto quel che veniva loro in mente, con assoluta libertà, dato che la prova serviva a noi per una ricerca e non aveva alcun fine valutativo; ci si impegnava anzi a non consegnare gli elaborati all'insegnante di classe. Il tempo a disposizione degli allievi era di "al più 20 minuti", ma di norma gli studenti consegnavano molto prima (la media è 9 minuti). Al termine del loro compito, alcuni bambini ci hanno chiesto di poter affrontare anche un ulteriore quesito; talvolta lo abbiamo concesso, ma in tal caso questo II testo era scelto nella coppia diversa da quella cui apparteneva il I testo assegnato allo studente.

Prima di procedere è necessaria una breve osservazione che riguarda il "clima" nel quale si svolgevano le prove. Ricordiamo qui che abbiamo scelto classi con programmazione tradizionale, nelle quali problemi con dati mancanti non sono mai stati proposti; risulta evidente dai protocolli seguenti che gli allievi non sono allenati ad affrontare nonsense, rompicapi, o meglio ancora, problemi "sfumati", non ben precisati, o addirittura impossibili perché il testo non dà le informazioni necessarie. Come vedremo, molti di essi sembrano cercare a tutti i costi di far "quadrare" ciò che non si può, anche con una componente di ansia o smarrimento (sintomatico il caso degli allievi che ricorrono all'espediente di scrivere tutti i dati nella speranza di far emergere qualche cosa di nascosto nel testo, così come è formulato). Non tutti sembrano avere la capacità e la sicurezza emotiva di affrontare problemi di questo tipo, con dati mancanti. Crediamo opportuno precisare che la nostra ricerca si è sempre svolta in un clima sereno, per nulla turbato da tensione, anche grazie all'esplicito accordo secondo il quale solo i ricercatori avrebbero visto i protocolli. Tuttavia, anche in un clima di questo tipo si sono avuti alcuni risultati intrisi di ansia probabilmente legati alla "novità" della proposta. Come ribadiremo in **6.**, anticipiamo brevemente qui che crediamo comunque importante introdurre nella pratica didattica anche problemi di questo tipo in modo che diventi usuale per l'allievo affrontarli.

4. Risultati e primi commenti.

4.1. Scuola Elementare, III. Risultati e commenti.

4.1.1. [P.1] Abbiamo accettato n. 92 protocolli, ottenendo le seguenti risposte:
- impossibile rispondere, con varie motivazioni concernenti la mancanza del dato fondamentale e cioè la presenza di denaro iniziale: 22,9%
- alla fine ha più soldi Giovanna: 58,4%
- alla fine ha più soldi Paola: 7,7%
- non risponde o non si capisce la risposta: 4,2%
- alla fine Giovanna e Paola hanno gli stessi soldi: 2,2%
- cambiano la domanda inventandosene un'altra: 4,2%.

Molti dei protocolli nei quali si risponde che G. ha più soldi contengono motivazioni il più delle volte implicite, ma talvolta esplicite, dell'assunzione del fatto che G. e P. avessero in origine la stessa cifra. Per esempio, Agnese suppone esplicitamente che G. e P. avessero 30.000 lire a testa, prima di iniziare la spesa.
In alcuni protocolli dello stesso tipo, si fa l'ipotesi che G. avesse più soldi di P., prima delle spese, per rafforzare la tesi finale. Vedremo in **4.1.2.** che questo "atteggiamento di rinforzo" è comune anche a P.2. Eccone un chiaro esempio:

Sara:

Calcolo i soldi di Giovanna:
50.000 –
10.000 =
40.000

Calcolo i soldi di Paola:
35.000 –
20.000 =
15.000

Rispondo:
Rimangono più soldi a Giovanna

È uno dei casi più espliciti di dato inventato per completare il testo.
Rarissimi sono i protocolli nei quali si fanno ipotesi multiple sul danaro di partenza, uno solo dei quali mostra piena consapevolezza, quello di Elisabetta:

> Dipende da chi aveva più soldi in tasca perché se Paola ha L. 80.000 e ne spende 20.000, e se Giovanna ha L.20.000 in tasca e ne spende 10.000 quella che ha più soldi nel borsellino è Paola. Invece se Paola aveva solo lire 30.000 in tasca e ne ha spese 20.000 e Giovanna aveva 60.000 e ne spende 10.000 quella che ha più soldi in tasca è Giovanna.

Molti sono i casi che esprimono un conflitto tra la consapevolezza di un dato mancante e il dato, assunto implicitamente, che G. e P. hanno, in partenza, gli stessi soldi nel borsellino. Abbiamo incluso tutti i seguenti casi (ed altri analoghi) tra le risposte del primo tipo (consapevolezza della mancanza di un dato):
Piergiacomo:

> Alla fine la bambina che ha più soldi nel borsellino è Giovanna.
> Ma dipende quanti soldi avevano nel borsellino Giovanna e Paola.

Sonia:

> Alla fine, Giovanna ha più soldi nel borsellino perché ha speso 10.000 in meno di Paola. Secondo me questo problema non è scritto bene perché non c'è il numero dei soldi che stavano nel borsellino.

Monia:

> Alla fine ha più soldi Giovanna. Per me spende meno soldi Giovanna, perché, Paola spende 10.000 L. in più.
> Però per me non posso rispondere precisamente, perché non c'è il numero dei soldi che rimangono nel borsellino.

Daniele:

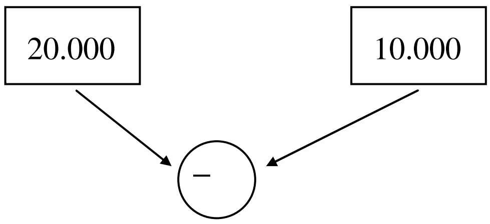
> Per me è Giovanna che ha più soldi nel borsellino. Ma mancano i dati di quanti soldi avevano prima.

Mattia:

> manca quanti soldi avevano in principio, comunque rimane più soldi Giovanna perché spende 10.000 in meno.

Il protocollo di Mattia è interessante anche per un'altra questione. Sui 92 protocolli accettati, si presentano 6 casi (tutti appartenenti al gruppo di coloro che dànno come risposta «Giovanna») nei quali compare una strategia di risoluzione grafica che può far pensare ad un

diagramma a blocchi o di flusso (il protocollo di Mattia è uno di questi 6). Non si tratta di allievi della stessa classe, il che fa supporre che in diverse classi gli insegnanti abbiano talvolta proposto questo aiuto grafico.
Vediamo com'è utilizzato questo strumento.
In 5 casi su 6, da due blocchi rettangolari contenenti come dati 20.000 e 10.000 partono segmenti che convergono in un blocco centrale quadrato o circolare nel quale campeggia il segno «–»



In 4 di questi 5 casi appare l'operazione: 20.000 − 10.000 = 10.000, mentre nel caso restante (Gabriele) sono scambiati di posto 20.000 e 10.000 e dunque Gabriele non è più in grado di eseguire la sottrazione; non la scrive, lasciando solo il disegno e la seguente dichiarazione:

Alla fine chi ha più soldi è Giovanna perché ne a spese di meno

Il sesto caso di diagramma a blocchi è costituito dal protocollo di Elisa nel quale la strategia è additiva, quindi nel grafico c'è un «+» al posto del «–»; ne risulta come risposta «30» (Elisa lavora in decine di migliaia) il che la porta comunque a concludere che la risposta è «Giovanna».
L'uso di tali grafici, piuttosto diffusi come vedremo anche in seguito, in realtà non sembra adeguato alle esigenze degli studenti. Gli insegnanti li adottano in classe, forse per "svecchiare" o per "rinnovare" delle tecniche di formalizzazione che ritengono antiquate; ma senza utilizzarne appieno l'efficacia. Di fatto restano contenitori vuoti e puramente formali. Molti allievi sembrano proporli forse solo per mostrare, in situazione di difficoltà, di avere però conoscenze 'matematiche'; un modo per dire: «Questo problema non lo so risolvere, però so usare un diagramma...». Tuttavia, al momento di compiere operazioni, preferiscono la via aritmetica tradizionale. Diagrammi a blocchi o a frecce sembrano spesso usati in modo non spontaneo, un omaggio dovuto a richieste da parte dell'insegnante. È anche plausibile pensare che questa situazione rispecchi le credenze dell'insegnante stesso...

Passiamo a protocolli di altro genere.
Gian Franco dà una soluzione piuttosto elaborata; dapprima rappresenta due insiemi contenenti ciascuno 30 pallini; in quello di sinistra evidenzia in rosso 10 pallini, in quello di destra 20. Sotto l'insieme di sinistra, disegna un diagramma a blocchi nel quale esegue 30–10=20; sotto quello di destra un diagramma a blocchi nel quale esegue 30–20=10. È ovvio che ha assunto l'ipotesi che G. e P. avessero ciascuna in borsellino 30.000 L e che ogni pallino rappresenti 1000 L. Infine scrive 30–10=20 e, sotto, 30–20=10; ne conclude che:

Nel borsellino ha più soldi Giovanna

Anche in questo caso sembra emergere nel bambino il bisogno di ricorrere ad un apparato complesso, quasi a voler dare maggior "dignità" matematica alla sua risoluzione.
Solo di passaggio segnaliamo l'eccesso di formalismi sostanzialmente inutili all'interno dei quali opera questo allievo; ciò gli crea difficoltà nel gestire la situazione, a scàpito di una

naturalezza che forse è stato convinto lentamente a rigettare in modo più o meno esplicito. Incontreremo ancora Gian Franco in **4.1.4.**

Abbiamo già detto che vi sono allievi che rispondono ad altre domande, non formulate; tra queste, certo la più diffusa sembra essere (implicitamente): «Chi spende di più?». Ecco infatti il protocollo di Annalisa:

> Nel borsellino ha più soldi Giovanno perché spende solo 10.000 lire, invece Paola ne rimane di meno nel borsellino perché spende 20.000 lire. In conclusione spende di più Paolo e spende di meno Giovanna.

Analoghi sono i testi di Romina, di Guido e di altri.

Ci sono dei protocolli con motivazioni varie, di carattere non matematico, sulla spesa o sulla sua motivazione concreta.
Marco fornisce un esempio che consideriamo rappresentativo di molti altri protocolli:

> Giovanna ha più soldi nel borsellino di Paola perché ha speso 10.000 L.
> Perché hanno poca roba in casa e si vede che hanno fame.

I seguenti sono interessanti per alcune osservazioni particolari che si possono generalizzare.
Luca:

> Nel borsellino ha più soldi Giovanna, perché ha speso di meno di Paola
> 10.000 + 20.000 = 30.000

Stefania:

> Nel borsellino rimane più soldi giovanna
> 30−10=20
> 10×10=100

Gionata:

> È Paola che non rimane più soldi nel borsellino, invece giovanna più furba perche ne spende 10000 lire in meno invece Paola spende 20000.
> 10000 lire sono composte da 10 1000 invece 20000 sono composte da 20 1000 lire oppure 2 volte 10000 lire. 10000 lire sono anche composte da 2 volte 5000 lire e le 20000 lire sono anche composte da 5000 lire ripetute 4 volte.

I protocolli di Luca e Stefania rivelano un atteggiamento assai più diffuso, come vedremo, tra i ragazzi della scuola media, e sul quale occorre riflettere.

Dopo aver dato la risposta (Giovanna) più intuitiva al quesito, alcuni allievi entrano in conflitto: la loro risposta a questo problema, quella che a loro viene spontanea, nella lingua materna, è formalmente assai diversa da quelle standard cui sono abituati dal contratto didattico. In queste risposte standard è forte una clausola del contratto didattico che richiede di esplicitare le operazioni che hanno condotto dal testo alla risposta (anzi, il bambino sa bene che questo è un passaggio essenziale e critico, perché è lì che si addensano di solito gli eventuali errori rilevati dall'insegnante).
Dunque, dopo aver dato la risposta in modo intuitivo con una sola battuta a parole, essi sentono la necessità di scrivere alcune operazioni nelle quali appaiono i dati numerici del testo: solo la presenza di qualche calcolo sembra ridare la dignità necessaria al loro compito. (Vedremo che nella scuola media questa esigenza è sentita maggiormente che non nella scuola elementare).

Chiameremo questa clausola del contratto didattico: ***esigenza della giustificazione formale*** (**egf**). L'esigenza è tale non per un bisogno intrinseco dell'allievo, ma per una sua interpretazione del modello generale di problema e di comportamenti al riguardo, che si suppongono attesi da parte degli insegnanti (e dunque dei ricercatori che vengono comunque assimilati ad insegnanti). L'ultima parte del protocollo di Gionata si può interpretare nello stesso senso. La prima parte non gli sembra matematicamente sufficiente a garantire una veste di ... ortodossìa alla sua risposta. E allora Gionata aggiunge sue personali annotazioni sulle monete ritenendo che questa sia la richiesta formale *implicita* nella domanda del problema. Incontreremo ancora questo allievo in **4.1.3.**

Vediamo ora altri tipi di risposte.
Ecco come Marcello giustifica che per lui Giovanna e Paola hanno gli stessi soldi.

> Nessuna delle due ha più soldi nel borsellini, perché se Giovanna aveva meno soldi di Paola nel borsellino, prima di spendere le 10000 [in rosso nel testo in un contesto nero] lire, Paola ne aveva di più prima di spendere le 20000 [in blu] lire ora sono pari.

Ed ora vediamo come Massimo dia la risposta «Paola»:

> Nel borsellino ha più soldi paola.
> Invece paola a vinto.
> Perche Paola ha 20000 lire.
> Invece Giovanna ha perso.
> Invece Giovanna non ha vinto.
> Perche Giovanna ha 10000 lire

Egli, probabilmente, non riuscendo a trovare un senso al problema, lo modifica, scambiando, forse inconsapevolmente, "spende" con "ha nel borsellino", in modo da confermare le cifre fornite.

In generale, la maggioranza dei bambini ha rappresentato la situazione problematica con disegni che, limitandosi per lo più a presentare due personaggi (non sempre due donne o bambine), o due borse ripiene di cibo, oppure due borsellini, sono tutti privi di supporto logico esplicito alla scelta della strategia di risoluzione; sembrano essere solo elementi atti a fissare un'immagine mentale della situazione.

Un'ultima nota. In diversi protocolli vi sono reinterpretazioni di varia natura: ad esempio il borsellino diventa salvadanaio o tasca, segno del fatto che i bambini si sono reinventati una situazione analoga a quella descritta nel testo, ma in qualche modo personalizzata; alcuni personaggi cambiano nome.

[Allo scopo di "saggiare" i test, abbiamo provato a darne in quantità minore anche in IV e V elementare in una fase sperimentale. Il divario percentuale delle risposte non sembra essere elevato, rispetto ai risultati di III, ma non è stato da noi valutato in modo rigoroso. Aumentano invece i tentativi di spiegazione delle proprie scelte. Su questo tipo di protocolli abbiamo puntato l'attenzione.
Ivan di IV:

> Se Giovanna spende 10000 milalire e Paola 20000 secondo me ha più soldi Giovanna se vanno al mercato con numero uguale di soldi perché Giovanna spende 10000 e Paola 20000 chi spende di neno è Giovanna e allora nel loro borsellino ha più soldi Paola
> E se invece vanno al mercato con uno di più dell'altro
> Esempio
> Giovanna ha 30000 Mila L
> Paola 40000 Mila L

E se Giovanni spende 10000 Mila L
E Paola 20000 chi ha più soldi nel borsellino è giovanni
RISPOSTA
Secondo me è Giovanni.

Giusi disegna un grafo a frecce che rappresenta 20.000−10.000; però non scrive il risultato ed invece esegue una classica sottrazione in colonna, trova 10.000 come risultato, per poi concludere:

Nel borsellino di soldi ne ha di più Giovanna

In V si riduce moltissimo il numero di risolutori che fanno spontaneamente disegni, mentre cresce la presenza di operazioni; per esempio, spesso si suppone che G. e P. abbiano 80.000 lire nei borsellini in partenza; le risposte tendono ad essere più laconiche. Scegliamo due protocolli, uno tra i più brevi ed uno tra i più lunghi:

Fabrizio:

Non rimane niente a nessuno perché hanno speso tutto

Irene:

Per me Paola, sapeva di spendere una somma abbastanza alta e allora s'è presa più soldi quindi, spendendo le 20.000, gli sarà rimasto più resto: Paola ha più soldi nel borsellino.

Questa motivazione, qui così esplicita, potrebbe essere sottointesa nelle risposte «Paola», avute anche nelle classi precedenti.]

4.1.2. [P.2.] Abbiamo accettato 93 protocolli, ottenendo i seguenti risultati:
- dipende da quanti soldi c'erano nei salvadanai o simili: 18,3%
- nel salvadanaio di Bruna: 62,3%
- nel salvadanaio di Aldo: 10,7%
- uguali:1
- non rispondono: 1
- rispondono ad un'altra domanda, non formulata: 6,5%.

Abbiamo accettato con molta larghezza tra i protocolli del primo tipo anche alcuni un po' incerti, proprio a causa di tale incertezza. Ecco alcuni esempi.

Enrico:

Nei salvadanai c'erano degli altri soldi.
Se non ci sono soldi nei salvadanai ce ne sono di più in quello di Bruna.

Luca:

Quanto aveva in tasca

Daniele:

Per me ci sono più soldi in quello di Bruna.
Ma manca il numero di soldi che c'erano prima nel salvadanaio.

Federica:

Secondo me ci sono più soldi nel salvadanaio di Bruna.
Non riesco a capire se prima i due bambini avevano degli altri soldi nel salvadanaio.

Sonia:

Secondo me ci sono più soldi nel salvadanaio di Bruna perché ne sono stati messi di più nel suo.
Per me però nel problema c'è un errore perché non hanno messo quanti soldi c'erano nel salvadanaio.

Tra le risposte, spesso si fanno ipotesi sul contenuto dei salvadanai *prima* della visita della zia generosa: in **ogni** caso contenente una trattazione formale, la quantità di denaro è sempre maggiore, già in partenza, nel salvadanaio di Bruna, quasi a voler rafforzare il risultato intuitivo che si vuol sostenere, oppure confermare i dati già posti nel problema (che Bruna

riceve più denaro di Aldo). Questo "*atteggiamento di rinforzo*" era già stato da noi segnalato in **4.1.1.** a proposito di P.1.
Sara:
Calcolo i soldi di Aldo:

> 35.000+
> 3.000=
> ———
> 38.000
>
> Calcolo i soldi di Bruna:
> 40.000+
> 5.000=
> ———
> 45.000
>
> Ci sono più soldi nel salvadanaio di Bruna.

Gianfranco suppone che nel salvadanaio di Bruna ci sono già 11.000 lire e che dunque ora ve ne sono 16.000; mentre in quello di Aldo ve n'erano 10.000 ed ora ve ne saranno ... 15.000 (nella sua ri-formulazione del testo, la zia dà 5.000 L a ciascun nipote). Ne conclude che ha più soldi Bruna.
Chi, tra i giovani risolutori, dà come risposta «Aldo», sembra interpreti la domanda del problema in questo modo: «Secondo te, *prima* della visita della zia Giovanna, c'erano più soldi nel salvadanaio di Aldo o in quello di Bruna?». Ecco allora che la zia ha una funzione equilibratrice; emblematico in questo senso il protocollo di Lorenzo:

> Secondo me ci sono più soldi in quello di Aldo, perché darà meno soldi a chi ne ha molti e di più a quelli che ne ha meno

Atteggiamenti e considerazioni di questo tipo sono molto presenti in III, mentre diminuiscono in VII, pur non sparendo affatto.
Anche chi risponde che ci sono tanti soldi nel salvadanaio di B. quanti in quello di A. assume un'idea di questo tipo.

Chi risponde ad altre domande, di norma (certo in modo inconsapevole) si inventa la seguente: «Che differenza c'è tra quel che la zia dà a Bruna e quel che dà ad Aldo?», e tutti costoro fanno i calcoli 5.000–3.000=2.000. Si tratta in sostanza di utilizzare i dati forniti dal problema, cercando di inserirli in un quadro dotato di senso. Carla per esempio afferma che ci sono più soldi nel salvadanaio di B.

> (...) perché la zia le ha regalato 5.000

poi disegna un diagramma a blocchi nel quale esegue la sottrazione 5.000 - 3.000 = 2.000 ed infine dichiara che

> Aldo e Bruna hanno di differenza 2.000 lire

rispondendo dunque di fatto anch'ella alla domanda non formulata detta sopra.

Altri casi:
nei protocolli di Simone e Luca:

> 3000+5000=8000

la domanda sembra essere: «Quanto è ... costata alla zia la visita ai nipotini?». Anche in questo caso si cerca di utilizzare i dati a disposizione, sommandoli invece di sottrarli.
Simona:

> La zia Giovanna ha messo più soldi nel salvadanaio di Bruna

che conferma i dati ponendosi implicitamente la domanda: «A chi ha dato più soldi la zia?».

Ed ecco due interventi scelti tra i tanti nei quali si fanno considerazioni che sembrano esulare dalla matematica, ma che invece sono o conferme dei dati a disposizione attraverso spiegazioni di punti salienti della storia, oppure negazioni dei dati stessi:
Marco:

> Ci sono più soldi nel salvadanaio di Bruna perché la zia Giovanna ne ha messi di più in quello di Aldo. Perché Chiara era molto gentile e Aldo un po' più maleducato

(qui il problema sembra essere: spiegare il motivo della differenza di comportamento da parte della zia)
Federica:

> Secondo me gli da a tutti e due la stessa cifra solo che Bruna ne aveva lasciato da parte qualche soldo

(la zia non può avere differenze di comportamento rispetto ai nipoti).
Luca:

> La zia da 2000 lire a Bruna in più di Aldo
> La zia da 2000 lire a Aldo in meno di Bruna
> La zia vuole bene ai suoi nipotini
> La zia da più soldi a Bruna
> La zia cè molto generosa con i suoi nipotini
> Secondo me ci sono più soldi nel salvadanaio di Bruna
> La zia è andata a trovare i suoi nipotini Aldo e Bruna
> La zia si chiama Giovanna
> Aldo e Bruna sono i nipotini della zia
> Aldo e Bruna hanno il salvadanaio per metterci i soldi

Questo protocollo richiederebbe un'analisi più approfondita; sembra emergere tuttavia uno dei suggerimenti spesso forniti dagli insegnanti di trascrivere sempre, in qualsiasi situazione, *tutti* i dati del problema prima di affrontarne la situazione. Si può notare del resto come Luca tenti di produrre una serie di dati esaustiva, alla ricerca di un senso da dare alla situazione problematica, quasi nella speranza che questa si risolva da sé. Ciò potrebbe stare ad indicare uno stato di disagio del bambino che da un lato vorrebbe dare la risposta che gli sembra più intuitiva (Bruna), dall'altro è poco convinto di poterla dare. Sembra così volerla "celare" in un lungo elenco di dati che lo rassicurino.

Come abbiamo già notato in **4.1.1.**, anche nelle risoluzioni di questo problema vi sono molti disegni fatti spontaneamente dai bambini, alcuni ricchi di particolari, ma che di fatto non forniscono aiuti nella ricerca di una strategia di risoluzione, bensì rappresentano solo la situazione descritta dal testo, una sorta di esplicitazione, di "traduzione grafica" dell'immagine mentale che l'allievo si è fatto leggendo il testo.
Da notare anche i non rari cambi di nomi propri nel corso della risposta (per esempio, nel protocollo di Marco, visto sopra, Bruna diventa Chiara) e di ... parentela (in un altro protocollo la zia Giovanna diventa il nonno). Ciò è segnale del fatto che entra in gioco una

componente personale affettiva piuttosto forte e, ancora una volta, che i bambini si sono fatti una loro personale immagine mentale della situazione.

[Tra i protocolli di IV segnaliamo quello di Nicola per l'esplicitazione puntuale del ragionamento seguito, a conferma dell'uso dei dati numerici, nel senso precisato sopra:

$\boxed{3000} \longrightarrow +5000 \longrightarrow \boxed{?}$

$$\begin{array}{r} 3000+ \\ 5000= \\ \hline 8000 \end{array}$$

Secondo me ci sono più soldi nel salvadanaio di Bruna.

Ragionamento

Io a ragionato con la mente e mi sono detto qui devo fare l'addizione e lo fatta.
Per la risposta della domanda o di nuovo lavorato con la mente e mi sono detto che i soldi di Bruna erano di più perché erano 5000

I risultati di IV e V, anche se da noi non analizzati con uguale meticolosità, non sembrano suggerire una casistica molto diversa rispetto a quella analizzata in III.
Ecco alcuni protocolli di V.
Alex:

Non posso saperlo perché se altri parenti o amici mettono più soldi nel salvadanaio di Aldo o di Bruna

Fabrizio:

I soldi dei due bambini sono uguali perché in quello di Aldo ce ne sono altri che ugualiano la somma

Michele:

La zia mette più soldi nel salvadanaio di Bruna, perché a ne pare che aldo e più piccolo.

Giovanni:

Non si può dire dove c'ene, di più perché bisogna sapere dove c'enerano di più prima.

Francesco:

Dipende quanti soldi c'erano prima. Può averne di più Aldo come può averne di più Bruna. Oppure possono avere la stessa somma]

4.1.3. [P.3.] Abbiamo accettato 77 protocolli, ottenendo le seguenti risposte:
- dicono esplicitamente che manca un dato: 17%
- inventano un dato esplicitamente e dànno una risposta: 6,5%
(si possono considerare nella stessa categoria il 23,5% delle risposte)
- studia più a lungo Giovanni: 72,7%
- non risponde: 1
- affermano che la risposta dipende da chi ha più compiti da svolgere:2.

La motivazione secondo la quale Giovanni studia più a lungo è legata ovviamente al fatto che 18 è di più, maggiore o simili, di 17. Due allievi asseriscono che Giovanni studia 18 ore ed Antonio 17. Molte le osservazioni moralistiche sul fatto che Giovanni fa felici i genitori mentre Antonio li delude, che Giovanni sarà preparato e che Antonio no, e simili, in vari modi.
Contro corrente il già noto Gionata:

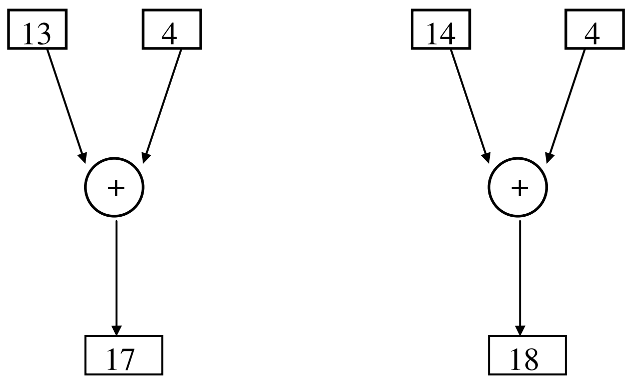
Antonio fa 60 Minuti in meno e Giovanni 60 Minuti di orologio in più.
Antonio è stato più furbo di Giovanni
Giovanni è stato meno furbo di Antogno

Antonio ha studiato di meno e Giovanni di più. Giovanni ha studiato un'ora in più e Antogno un'ora in meno Giovani ha fatto un'ora composta di 4 quarti o due mezzi o intera cioè un ora intera.

Gionata tenta un approccio molto personale al problema, ricorrendo ad una descrizione della situazione arricchita con sue considerazioni personali sui personaggi; ma poi la presenza del linguaggio matematico non gli sembra sufficiente (è l'influenza della clausola del contratto didattico **egf**, già evidenziata) e si decide a "matematizzarla" sull'unico appiglio a carattere matematico che il testo sembra offrire. Si noti il protocollo del tutto analogo dello stesso Gionata, visto in **4.1.1.**

Questa mancanza di "appigli" a carattere matematico mette in difficoltà molti allievi ed è forse legata alla particolarità dei dati numerici relativi a durate. È probabilmente per questo che i tentativi di formalizzare si riducono a 2 soli su 77 (entrambi con diagrammi a blocchi).

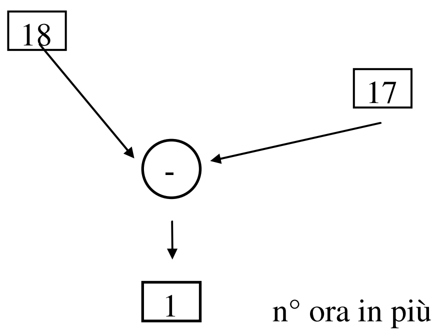
Paolo fa iniziare Antonio alle 13 e Giovanni alle 14:



e conclude dichiarando che: «(...) allora hanno studiato uguali».

Mirco:

Antonio è arrivato a scuola per primo allora studia di più Giovanni.



n° ora in più di Antonio

Una casistica molto dettagliata e certo molto notevole sul piano logico è presentata da Marco:

1° Soluzione: se Antonio ha studiato dalle ore 15 alle ore 17; Giovanni studiato dalle ore 16 alle ore 18, allora i due amici hanno studiato le stesse ore.

2° Soluzione: se Antognio ha studiato dalle ore 14 alle ore 17; Giovanni dalle ore 16 alle ore 18, allora Antogno ha studiato di più di Giovanni.

3° Soluzione: se Antognio ha studiato dalle ore 16 alle ore 17; Giovanni dalle ore 16 alle ore 18, allora ha studiato più Giovanni.

Marco ricorre ad un elenco di casi numerici ma tipologicamente esaustivo, di possibilità diverse.

[In IV e V le cose non variano molto; è solo un po' più accentuata la consapevolezza del fatto che manchi l'ora d'inizio dello studio. I bambini si impegnano di più a cercare vie formali con giustificazioni in un linguaggio un po' meno naturale ed un po' più artificiale. Ciò sembra confermare che la clausola **egf** diventa sempre più condizionante col crescere del livello scolastico. Poiché però aumenta anche l'età, non si può qui distinguere l'influenza distinta delle due variabili "influenza della clausola **egf** del contratto" e "età". Sarebbero necessarie ricerche più approfondite per distinguere gli effetti delle due diverse influenze].

4.1.4. [P.4.] Abbiamo accettato n. 80 protocolli ottenendo i seguenti risultati:
- riconoscono esplicitamente che manca un dato: 22,5%
- inventano un dato esplicitamente e dànno una risposta: 8,7%

(si possono considerare nella stessa categoria il 31,2% delle risposte)
- vede i cartoni Carla: 37,6%
- li vede Carlo[4]: 18,7%
- li vedono tutti e due: 3,8%
- non li vede nessuno dei due: 1 solo caso
- non rispondono: 7,5%.

La maggior parte dei soggetti che inventano dati sceglie un orario di inizio (o tenta di farlo) in modo da permettere ad entrambi i personaggi del problema di vedere la TV; ma molto di più si potrebbe dire su ciascuno dei seguenti protocolli:

Luca:

Lo potranno vedere tutti e due perché dall'una alle cinque c'è più di un'ora e mezzo

(sembra scegliere l'una come orario di inizio per entrambi e poi fare i calcoli solo sulla durata di Carlo che è la più lunga)

Marcella:

I cartoni possono vederli entrambi perché possono avere iniziato alle 14.30 così possono arrivare alle 17.

Matteo invece reinventa completamente e spontaneamente il problema seguente:

Carlo comincia a fare i compiti alle 15 mentre Carla alle 16: chi vede più TV?
Rispondo:
Guarda più TV Carlo.
Perché:
Perché inizia prima a fare i compiti anche se ci mette più tempo.

Qualche ... personale computo del tempo:

Arabella:

Chi potrà vedere i cartoni animati è Carla perché impiega meno tempo.
La differenza è di 25 minuti.
Ne vorrei ancora di questi problemi perché sono bellissimi.

---

[4] Tra le risposte «Carlo», alcune sono ben motivate; infatti il senso del "poter vedere i cartoni animati in TV" è stato interpretato in termini di "premio per aver studiato di più". Vedremo in dettaglio questo caso.

CIAO.

Marco:

I cartoni li vedra prima carla

Io o ragionato in questo modo perché le 17 sono prima delle 45 e di un ora e mezza ma le 45 sono prima di un'ora e mezza e i cartoni non sono ancora finiti

Davide:

Carlo ci mette 75 minuti in più di Carla.

Alice:

I cartoni animati in TV. Li possono vedere tutti e due perché 45 minuti e un'ora e mezza sono la stessa cosa.

Maurizio:

CARLO

Perche 45 e più di 17

Come abbiamo precedentemente affermato, tra coloro che decidono che è Carlo a poter vedere i cartoni, c'è una giustificazione che s'intuisce da dichiarazioni non sempre esplicite o da frasi appena abbozzate. Carlo, che è stato più diligente ed ha dedicato più tempo ai compiti, avrà *come premio* quello di poter assistere ai cartoni animati; Carla, invece, verrà punita per la mancanza di impegno. Questa interpretazione si rivela in modo abbastanza evidente in 3 protocolli:

Anonimo:

I cartoni potra vederli Carlo perché un'ora e mezzo è più tanto

(e qui forse scatta l'idea del premio, legata ad un calcolo secondo il quale un'ora e mezza è più di 45 minuti)

Gabriele:

Carlo, perché ha studiato un'ora emmezzo cioè quasi 70 minuti in vece Carla 45 minuti.

Stefania:

Carlo secondo me è più bravo Carlo perché studia, anche Carla e brava però deve stare un po' più lì col compito.

Di interpretazione un po' più incerta sono i protocolli seguenti:

Sara:

Secondo me potrebbe vederle Carlo. Perché un'ora e mezzora sarebbe troppo di 25 minuti.

Nel protocollo di Marco, invece, sembra lecito supporre che il "potrà vedere" sia stato pensato come "riuscirà a vedere":

Per me è Carla perché fa i compiti 45 minuti invece Carlo li fa per un ora e mezza. E quindi arriva a vedere i cartoni animati.

L'interpretazione di Marco è in assoluto la più condivisa.

Ecco un altro protocollo significativo per motivi diversi:

Mirco:

I cartoni li potranno vedere tutti e due perché tutti e due finiscono prima

questo è il trabocchetto.

Lo abbiamo incluso tra le risposte del primo tipo perché ci è sembrato che Mirco abbia capìto il senso della mancanza dei dati e, anche se non in modo esplicito o formale, abbia ideato dati adatti a tutti e due i bambini protagonisti del testo. Nella sua risposta c'è forse un'influenza del contratto sperimentale.

Gian Franco sembra voler trasformare le ore di due orologi in insiemi contenenti pallini sui quali sono disegnate croci e su alcuni dei quali è scritto visibilmente “ora”. Il disegno (a matita) è molto confuso e dunque difficile da interpretare.
Questo bambino è lo stesso che nella soluzione del P.1 (si veda **4.1.1.**) aveva rappresentato il danaro delle protagoniste con pallini; è chiaro che ha in entrambi i casi cercato di utilizzare una strategia insiemistica che è stata probabilmente suggerita da un suo insegnante forse fin dai primi giorni della scuola elementare, ma che lui non domina pur cercando di farne uso in ogni situazione problematica.
Tali osservazioni fanno emergere la necessità didattica di sollecitare un uso critico da parte del bambino dei formalismi introdotti.
È inoltre improbabile che sulle risposte abbiano agìto fattori affettivi ed emozionali, ma anche una mancanza di didattica specifica del tempo convenzionale (Sandri, 1993, 1996).

[In IV e V aumenta nettamente il tentativo di dominare formalmente il problema, usando i dati numerici del testo del problema per giustificare le risposte. Tra tutti i formalismi usati, non sono pochi i ricorsi a diagrammi a frecce; abbiamo scelto i seguenti dato che, pur partendo entrambi dal dato 45, in uno si addiziona 17 e nell’altro si sottrae 17:
Nicola:

$\boxed{45} \longrightarrow (+17) \longrightarrow \boxed{?}$

45+
17=
———
62

Potrà vederli Carla.

Maria Rosaria:
DATI
45 minuti Carlo
17 ore Carla

$\boxed{45} \longrightarrow (-17) \longrightarrow \boxed{?}$ Trovo chi dei due potrà vedere i cartoni

45+
17=
———
28

I cartoni li vede Carlo.]

4.2. Scuola media inferiore, II. Risultati e commenti.

4.2.1. [P.1.] Abbiamo accettato n. 41 protocolli; abbiamo ottenuto le seguenti risposte:
- impossibile rispondere perché non si sa quanti soldi avevano nel borsellino (o simili): 63,5%
- ha più soldi Giovanna: 24,4%
- ha più soldi Paola: 2
- non risponde:1
- fa un lungo discorso, sostanzialmente senza prendere partito: 1
- Giovanna e Paola hanno gli stessi soldi:1;

da notare che del 63,5% che dà la risposta «impossibile», con motivazioni diverse, circa la quarta parte (dunque circa il 16% del totale) sostanzialmente reinventa il testo del problema creando dati:
2 fanno l'ipotesi esplicita che G. e P. avessero in partenza gli stessi soldi, altri attribuiscono le seguenti coppie di dati (il primo numero sta per "Giovanna aveva nel borsellino lire...", il secondo l'analogo per Paola): (50.000, 40.000) (50.000, 30.000) eccetera.
Tra i protocolli nei quali si attribuiscono più soldi finali rimasti a Paola, ecco quello di Silvia nel quale si evidenzia un primo sforzo di produrre dati in modo formale e poi giustificare con i calcoli la risposta; tutto ciò produce conflitto (o solo incertezza) che si manifesta in una correzione al punto culminante:

> Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è Giovanna [poi corretto in "Paola"]
> perché:
> Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000,
>
> | | |
> |---|---|
> | 10.000 | 20.00 |
> | Giovanna | Paola |
>
> 20.000−10.000=10.000 (soldi di Giovanna)
> 10.000+10.000=20.000 (soldi di Paola)

Intuitivamente Silvia risponde «Giovanna»; ma poi, sempre in base alla clausola **egf** del contratto didattico, decide di sostenere la sua risposta con qualche operazione formale. Sceglie di eseguire due operazioni, al termine delle quali, però, i risultati creano un conflitto tra la risposta data intuitivamente e quella ottenuta con i calcoli (per quanto fondati assurdamente). Ebbene, emerge qui a nostro avviso una immagine molto forte e molto negativa della matematica: si deve credere comunque a quel che i calcoli comportano. Anche se la fondazione del calcolo è assurda (ma non sappiamo con che grado di consapevolezza da parte di Silvia), l'apparato formale viene accettato come sostegno e come fonte di sicurezza. Il conflitto tra una risposta intuitiva ed una assurda formale è risolto a favore di quest'ultima: Silvia cancella la prima risposta «Giovanna» ed al suo posto scrive «Paola».
Tra le risposte che abbiamo accolto tra quelle del primo gruppo ("impossibile...") c'è anche questa, di Elena:

> Rimangono più soldi nel borsellino chi aveva più soldi all'inizio della spesa

per l'evidente tentativo di spiegare che i dati sono incompleti.

4.2.2. [P.2.] Abbiamo accettato n. 42 protocolli, riscontrando le seguenti risposte:
- dipende da quanti soldi ha/hanno nel salvadanaio (con tante variazioni possibili): 47,6%
- ci sono più soldi nel salvadanaio di Bruna: 38%
- in quello di Aldo: 2
- non risponde: 1
- ci sono gli stessi soldi nei due salvadanai: 1
- dànno risposte ad altre domande non formulate: 2.

Da notare che fanno parte del primo gruppo ("dipende...") 7 soluzioni per le quali i soggetti fanno ipotesi varie (non sempre esplicite): in 6 casi si fa l'ipotesi che nei due salvadanai ci fosse, prima del regalo della zia, la stessa quantità di soldi; in 1 caso (Nicola) si fa l'ipotesi che nel salvadanaio di Aldo ci fossero 50.000 L ed in quello di Bruna 30.000.
Come abbiamo già visto nella scuola elementare, la domanda del testo si è rivelata non ben formulata perché potrebbe lasciare il dubbio seguente: ci sono più soldi nel salvadanaio di Aldo o in quello di Bruna *prima* dell'intervento della zia Giovanna o *dopo* il suo regalo?
Giorgio:

Ha più soldi Aldo perché ne mette di più in quello di Bruna

[sembra quasi di intravvedere una zia che intende ristabilire equilibrio e giustizia, figura già incontrata nella scuola elementare (**4.1.2.**)].

Davide:

Per me in quello di Aldo, perché vuol dire che Aldo ha già molti soldi in più di Bruna

(situazione simile)

Serena sembra avere criteri del tutto simili ai precedenti:

Aldo ha più soldi nel suo salvadanaio e quindi la zia Giovanna mette più soldi nel salvadanaio di Bruna

Vittoria, che sembra appartenere al gruppo di quelli che dànno risposte ad altre domande non formulate, risponde: 3000+5000=8000, un classico, già visto nella scuola elementare, consistente nel collegare i dati a disposizione tramite un'operazione.

Da segnalare infine la vibrata protesta di Deborah:

Metete più dati per favore perché non si capise nulla

che abbiamo ovviamente inserito nel primo gruppo di solutori.

4.2.3. [P.3.] Abbiamo accettato n. 38 protocolli, con le seguenti risposte:

- manca un dato (o simili): 65,8%
- inventano un dato: 7,9%

(per cui classifichiamo nel primo tipo di risposta il 73,7%)

- studia di più Giovanni: 26,3%

Riportiamo separatamente i 3 casi in cui il soggetto inventa un dato:

per Giorgio: iniziano tutti e due alle 15

per Elisa: Antonio inizia alle 14 e Giovanni alle 16

per Serena: Antonio inizia a studiare prima (di Giovanni).

Vediamo ora due protocolli straordinariamente interessanti di solutori che hanno indicato come soluzione Giovanni:

Massimo:

18:17=9:5 [poi cancellato]

18×9=172 minuti

17×8,5=144,5 minuti

studia di più Giovanni

Massimiliano:

17=Antonio studia fino

18=Giovanni studia fino

24−17=7 (quando ha iniziato antonio)

24−18=6 (quando ha iniziato Giovanni)

17−7 =10 (quanto ha studiato Antonio)

18−6=12 (quanto ha studiato Giovanni)

Giovanni ha studiato per più tempo

I protocolli di Massimo e di Massimiliano sono emblematici dell'atteggiamento molto diffuso nella scuola media di tentare vie formali, molto di più di quanto accada nella scuola elementare. È ovvio che il ragazzo ha assunto l'idea che la risposta ad un problema di matematica, per quanto ovvia, debba essere sostenuta con calcoli il più possibile complessi. In classe di Massimo, al momento del test, si stavano affrontando le proporzioni; ed è per questo che egli tenta questa via. Il caso di Massimiliano è ancora più singolare. Egli ha forse seguìto una probabile indicazione ricevuta in precedenza da un insegnante, di elencare i dati contenuti nel testo, prima della risoluzione del problema; ma come esprimere in un linguaggio idoneo alla matematica (alla richiesta linguistica implicitamente imposta, secondo l'interpretazione di Massimiliano, dall'insegnante) i pochissimi dati numerici presenti nel testo? Ecco l'idea, formulata nelle prime due righe del protocollo. La lingua qui usata da Massimiliano è uno splendido esempio di ciò che altrove abbiamo chiamato "*matematichese*", una specie di versione acritica del linguaggio matematico usata dall'allievo che tenta di imitare linguaggio e comportamento dell'insegnante (D'Amore, 1993b). (In questo stesso quadro, si potrebbero rileggere molti dei protocolli precedenti; per esempio quello di Silvia, visto in **4.2.1.**). Massimiliano conclude poi con una serie di operazioni senza senso; ma ciò è spiegabile grazie alla solita clausola **egf** del contratto didattico.

4.2.4. [P.4.] Abbiamo accettato n. 40 protocolli, con le seguenti risposte:
- dipende da quando iniziano (e simili): 55%
- Carla: 32,5%
- Carlo:1
- tutti e due: 2
- non rispondono:2

Circa un terzo dei soggetti che abbiamo inserito nel primo gruppo inventa casi, creando da sé dati: Daniela fa iniziare lo studio di entrambi alle 16:15, Irene alle 16 e Giorgia alle 3;
Simone fa iniziare Carlo alle 15:30 e Carla alle 16:15;
un anonimo fa varie ipotesi e le fa partire contemporaneamente una volta alle 3 ed una volta alle 4
Nicola fa partire Carlo alle 3:30 e Carla alle 4:15.
Valentina e Stefania esprimono il parere che la soluzione dell'esercizio dipende dalla quantità di compiti che hanno da fare propendendo quindi per una risposta extra-matematica.

Citiamo infine la segnalazione di Azadeia che rientra nel filone di coloro che forse ritengono la prova uno stratagemma ideato dai ricercatori per avere notizie sulle abitudini degli allievi circa compiti e TV (e questa è un'altra possibile clausola del contratto sperimentale):

> Carlo è colui che si impegna di più nello studio e vi dedica 90 minuti, quindi non riesce a vedere i cartoni.
> Carla invece dedica allo studio solo 45 minuti, quindi non riesce a vedere i Cartoni Animati.
> Secondo me i Cartoni non servono proprio a molto perché riempiono la memoria dei ragazzi di cose spesso fantastiche, quindi darei ragione a Carlo e io seguirei il suo metodo di studio

4.3. Confronto percentuali. Riassunto schematico delle risposte fornite.

III VII

P.1.	"mancano dati"	22.9%	63.5%
	"Giovanna"	58.4	24.4
	"Paola"	7.7	4.9
	non risponde	4.2	2.4
	"soldi uguali"	2.2	2.4
	cambia domanda	4.2	
P.2.	"mancano dati"	18.3	47.6
	"Bruna"	62.3	38
	"Aldo"	10.7	4.8
	"stessi soldi"	1.1	2.4
	non risponde	1.1	2.4
	cambia domanda	6.5	4.8
P.3.	"mancano dati"	17	65.8
	inventa un dato	6.5	7.9
		(23.5)	(73.7)
	"Giovanni"	72.7	26.3
	non risponde	1.3	
	altre risposte	2.5	
P.4.	"mancano dati"	22.5	41.2
	inventa un dato	8.7	13.8
		(31.2)	(55)
	"Carla"	37.6	32.5
	"Carlo"	18.7	2.5
	"tutti e due"	3.8	2.5
	"nessuno dei due"	1.2	
	non risponde	7.5	5

Si notino i valori relativi alla risposta «Giovanna» (P.1): 58,4% e 24,4%; e quelle relative alla risposta «Bruna» (P.2): 62,3% e 38%. La situazione P.2 è affettivamente più coinvolgente di P.1, così come P.4 lo è rispetto a P.3. Noi avevamo fatto l'ipotesi che il passaggio dall'una all'altra dovesse comportare un "abbassamento della soglia critica" e, di conseguenza, una diminuzione significativa di risposte corrette (tra P.1 e P.2, così come tra P.3 e P.4). Una prima lettura rapida delle percentuali di riuscita sembra a prima vista confermare tale ipotesi. Ma un'analisi statistica un po' più approfondita[3] mostra invece che gli scarti corrispondenti alla variabile determinata non sono affatto significativi statisticamente, il che contraddice la nostra ipotesi.
La situazione è *la stessa* nelle prove fatte a Thessaloniki dal prof. Athanassios Gagatsis con 181 allievi di III (9 anni), IV (10 anni) e V (11 anni) elementare; ecco di seguito i risultati nostri e di Gagatsis a confronto, solo relativamente alla risposta del I tipo (denunciano esplicitamente la mancanza di un dato):

[3] della quale ringraziamo il prof. Fausto Desalvo del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

	D'Amore-Sandri (Italia)		Gagatsis (Grecia)
	III (8)	VII (12)	III(9), IV(10), V(11)
P.1	22.9	63.5	37.6
P.2	18.3	47.6	29.3
P.3	17	65.8	32
P.4	22.5	41.2	27.6

Al contrario, i risultati concernenti la variabile "età" sono diversi. Da un'analisi dei risultati statistici più elaborata, appare chiaro che l'aumento dell'età fa aumentare il numero degli allievi che si rendono conto della mancanza di dati nell'enunciato dei problemi **p.r.** P.1, P.2 e P.3, ma non significativamente per P.4.

5. Discussione dei risultati in relazione alle ipotesi espresse nel capitolo 2. ed alle risposte alle domande formulate nel capitolo 1.

Alla luce dei risultati visti in **4.** ed in relazione alle ipotesi formulate in **2.**, riteniamo si possano trarre le seguenti conclusioni.

1. Necessità di produrre una risposta.
Appare chiaramente che, indipendentemente dall'età (dal livello scolastico), l'allievo ritiene sia un comportamento dovuto quello di dare comunque una risposta al problema, anche in mancanza di un dato ed *anche quando si accorga di ciò*; non solo, ma egli sente la necessità [che abbiamo voluto chiamare "clausola **egf**" (esigenza della giustificazione formale) del contratto didattico] di fornire, accanto ad una risposta ottenuta intuitivamente, anche una risposta formale. Essa è ottenuta con non importa quale operazione (ma con scelta di un apparato aritmetico che si fa via via più complesso con il livello scolastico), purché si faccia uso di tutti i dati numerici a disposizione nel testo.

2. Riconoscimento di un problema che non ha soluzione.
Ragazzi più grandi riconoscono in percentuale maggiore che si tratta di un problema senza soluzione per la mancanza di un dato, come si evince dalla tabella precedente.
Dobbiamo però confessare che ci aspettavamo, in VII, percentuali molto più alte di questo tipo. Tale attesa era condivisa dagli insegnanti di scuola media che hanno in qualche modo collaborato alla ricerca. Tutti abbiamo errato per eccesso (notevole) di ottimismo.

3. Uso di disegni e grafici.
I risultati confermano pienamente che la tendenza a far ricorso ad un disegno rappresentativo della situazione è molto più diffusa negli allievi di età inferiore; essa, molto viva in III, si riduce notevolmente in VII, sostituita da un apparato formale più complesso. Mentre in III sono molti i casi di disegno spontaneo (oltre il 30%) e molti i casi di risposte senza conteggio

formale (oltre il 65%), in VII sono (quasi) spariti i disegni (solo 3 in tutto), mentre pochissime sono le risposte scritte a parole che non sono accompagnate da una qualche formalizzazione a difesa della prima risposta (meno del 20%). (L'uso spontaneo del disegno nella risoluzione dei problemi è un campo di grande interesse che non possiamo affrontare qui; è già previsto un approfondimento successivo limitato a questa particolare questione) (D'Amore, 1995).
Abbiamo poi rilevato ciò che abbiamo chiamato "*atteggiamento di rinforzo*" nel quale lo studente inventa dati per sopperire le lacune, ma tali dati inventati sono scelti in modo tale da *confermare*, anche dopo le operazioni, la risposta intuitiva ottenuta dopo la prima lettura del testo, oppure per confermare i dati forniti dal testo. C'è un unico caso contrario, tra molte decine, ed è in quello di Silvia, segnalato in **4.2.1.**

4. Risposte di tipo non matematico e linguaggio degli allievi.
Sono molto presenti risposte di tipo non matematico, legate alla natura per così dire narrativa del testo, o di tipo etico o di spiegazione extra-matematica. Più presenti nella scuola elementare (oltre il 25%), sono tuttavia vive anche nella scuola media (il 6% circa).
Il linguaggio usato dagli allievi è stato già oggetto di osservazioni nel corso del paragrafo **4.** Si può riassumere qui, notando come vi sia evidente conflitto tra il modello generale di problema aritmetico, modello al quale si uniformano (rinforzandolo) *tutti* i testi che l'allievo incontra nella sua vita di studente, e ciascuno dei testi da P.1 a P.4. Tale conflitto è evidenziato dal fatto che lo studente avverte la possibilità di dare una risposta "secca" (contrariamente a come invece fa di solito), solo a parole, senza giustificazione formale; ma poi non considera sufficiente la sua produzione e ritiene (**egf**) di *dover* matematizzare formalmente tale sua risposta; aggiunge allora delle operazioni che: o sono completamente "a vuoto" o sono operazioni lecite aventi però nulla a che fare con il problema proposto. Il fatto che, come (quasi) sempre accade, *prima* lo studente scriva la risposta intuitiva e *dopo* la sua giustificazione formale, ci spinge a dare la spiegazione precedente in termini di "conflitto". Ciò è vero in III, ma lo è molto di più in VII, come abbiamo già detto. Questa osservazione è interessante anche per quanto concerne una riflessione sul linguaggio del quale lo studente fa uso. Si nota infatti come il linguaggio in III sia molto più spontaneo e naturale di quello usato in VII. In III lo studente scrive la risposta non formale in lingua naturale, così come la direbbe a voce in contesto extra-scolastico; ma in VII si ha quasi l'impressione che lo studente avverta che questo tipo di linguaggio non è adatto in contesto matematico e s'impegna a renderlo più vicino a quello che sente usare dall'insegnante e che trova sui libri di testo. Il linguaggio che ne risulta è quello che abbiamo chiamato "*matematichese*" in **4.2.3.**, una sorta di versione acritica del linguaggio usato dall'insegnante e che lo studente cerca di imitare (si veda il protocollo di Massimiliano in **4.2.3.**). Il "matematichese" può anche essere... formalizzato, ed allora si possono leggere in questa chiave molti altri protocolli: per esempio quello di Massimo (**4.2.3.**), tanti diagrammi a blocchi o di flusso, i tentativi insiemistici di Gian Franco (si veda **4.1.1.** e **4.1.4.**) ed altri ancora.
La nostra ipotesi 4 è dunque del tutto confermata.

5. Abbassamento della soglia critica per maggior coinvolgimento.
L'ipotesi 5, come abbiamo già visto in **4.3.**, non è confermata da una indagine statistica significativa.

6. Due brevi note finali.

1. Oltre all'influenza del "*matematichese*" nella tendenza a risolvere in ogni caso e a tutti i costi un problema proposto *a scuola* (influenza che è effetto e non causa di un contratto didattico implicito o presunto tale, oppure di un obbligo parassita di tipo comportamentale), ci pare abbia la necessità di analisi la disabitudine dei soggetti ad affrontare situazioni problematiche "aperte", già segnalata al termine di **3.**
D'altra parte, ci pare un aspetto importante della matematica (da un punto di vista epistemologico), quello di sollecitare a riflettere sulla inutilità del formalismo "a vuoto", sulla visione globale del problema. Troppo spesso la matematica è vista solo come la *tecnica di risoluzione* dei problemi e non come un *criterio di analisi* dei problemi. Questa riflessione, fatta in modo esplicito, ci sembra possa essere di grande aiuto nella prassi didattica a qualsiasi livello scolastico.

2. Un interesse didattico riveste, a nostro avviso, la seguente questione. Abbiamo già detto, ed è comunque fatto accettato, che il bambino ha un modello mentale per così dire "generale" della nozione di problema (in modo specifico, in àmbito matematico); tale modello è ottenuto, come una delle conseguenze del contratto didattico, per generalizzazione indotta da tutti i problemi con i quali l'allievo ha a che fare nella sua vita di studente. Ora: ci sono classi nelle quali i bambini sono abituati a stare all'erta perché è stata creata una clausola esplicita in base alla quale essi sanno che devono analizzare i testi dei problemi, dato che può capitare che il testo proposto abbia dati insufficienti, eccessivi, contraddittori o che sia in qualche altro modo insolubile. Ma l'esistenza di queste classi costituisce tuttora, in base alla nostra esperienza, un'eccezione. Nella stragrande maggioranza dei casi, invece, il "modello generale" di problema prevede un qualcosa che porti ad una sola soluzione e, di più, strettamente determinata, ottenuta con una o più operazioni aritmetiche nelle quali si faccia uso di tutti e soli i dati numerici che appaiono nel testo.

Ringraziamenti. Gli autori desiderano ringraziare Efraim Fischbein e Gérard Vergnaud per la loro meticolosa lettura e per i preziosi consigli che hanno gentilmente dato ad una prima redazione di questo articolo; ringraziano inoltre Gilbert Arsac, Luciana Bazzini, Lucia Grugnetti e François Jaquet per i suggerimenti dati per la redazione finale.

Riferimenti bibliografici.

BARUK S. (1985), *L'âge du capitain. De l'erreur en mathématiques.* Paris, Seuil.
BOERO P. (1986), Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 9, 9, 49-93.
BOUCHARD J. M. (1987), La famille: impact de la déficience mentale et participation à la intervention. In: S. Ionescu (ed.), L'intervention en déficience mentale, vol. I. Bruxelles, Mardaga.

BRISSIAUD R. (1988), De l'âge du capitaine à l'âge du berger, *Revue française de pédagogie*, 82, 23-31.
BROUSSEAU G. (1980), L'échec et le contrat, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 41, 177-182.
BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.
BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9, 3, 308-336.
CHEVALLARD Y. (1988), Sur l'Analyse Didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation, IREM d'Aix - Marseille.
D'AMORE B. (1993a), *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano, Angeli Editore.
D'AMORE B. (1993b), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 289-301. [Una versione più ampia: Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme, in: Gagatsis A. und Maier H. (eds.), *Texte zur Didaktik der Mathematik*, Thessalonique-Regensburg, Erasmus-Université de Thessalonique, 105-125. Anche in: *Journal für Mathematik Didaktik*, 17, 2, 1996, 81-97].
D'AMORE B. (1995), Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 328-370.
D'AMORE B. (1997), Matite - Orettole - Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione?, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, in corso di stampa.
D'AMORE B., SANDRI P. (1993), Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 348-353. [Anche (1995): *Cahiers de Didactique des Mathématiques*, 16-17, in greco 11-28, in francese 103-110.]
EQUIPE "ELEMENTAIRE" DE L'IREM DE GRENOBLE (1980), Quelle est l'âge du capitain?, *Bulletin de l'APMEP*, 323, 235-243.
KRUTETSKII V. A. (1976), *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago and London, University of Chicago Press.
PERRET-CLERMONT A.-N. (1992), L'extorsion des réponses en situation asymetrique, Conversations adulte-enfants, *Verbum*. Nancy, Presse Univ. de Nancy.
PUCHALSKA E., SEMADENI Z. (1988), A structural categorization of verbal problems with missing, surplus or contradictory data, *Journal für Mathematik Didaktik*, 9, 1, 3-30.
SANDRI P. (1993), Per una didattica del tempo convenzionale, *Scuola Se - Dossier didattico*, 10, 16-21.
SANDRI (1996), *La didattica del tempo convenzionale*. Milano, Angeli Editore.
SCHUBAUER-LEONI M. L., NTAMAKILIRO L. (1994), La construction des réponses à des problèmes impossibles, *Revue des sciences de l'éducation*, 1, 87-113.
VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique, la realité*. Berne, Peter Lang.
ZAN R. (1991-92), I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare, *L'insegnamento della matematica e della scienze integrate*, 14, 7/9, 659-677 e 807-840; 15, 1, 39-53.
ZAN R. (1992), Il ruolo del contesto e della domanda nel problema espresso in forma verbale, *La Matematica e la sua didattica*, 6, 2, 38-45.